

В. И. Данченко, Д. Я. Данченко (Владимир)

## О СУММАХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ ХАРДИ

**Теорема 1.** Пусть в верхней открытой полуплоскости  $C^+$  фиксирован некоторый набор точек  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  ( $n \geq 3$ ), и в классе Харди  $\{f\} = H^1(C^+)$  имеем

$$\sup\left\{\left|\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\right| : \|f\|_{H^1} \leq 1\right\} = M. \quad (1)$$

Тогда  $M \cdot \min_k \{\Im \zeta_k\} \geq A_1 \ln(\ln n) / \ln n$ ,  $A_1 = \text{const}$ . Оценка точна по порядку  $n$ .

Если в условии (1) суммы  $\sum f(\zeta_k)$  заменить на  $\sum f'(\zeta_k)$  (при сохранении прочих условий), то вместо предыдущей оценки будем иметь  $\sqrt{M} \min_k \{\Im \zeta_k\} \geq A_2 \ln^2 n / \sqrt{n}$ ,  $A_2 = \text{const}$ .

Сформулируем подобное утверждение для функций класса Харди  $\{f\} = H^1(D^+)$  во внешности  $D^+ = \{z : |z| > 1\}$  единичного круга с дополнительным условием  $f(\infty) = 0$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_n\} \subset D^+$ , и в указанном классе имеем  $\sup\left\{\left|\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\right| : \|f\|_{H^1} \leq 1\right\} = M$ . Тогда  $\min_k \{|\zeta_k| - 1\} \geq A_3 \ln n / n$  ( $A_3 = \text{const}$ ) при достаточно больших  $n \geq n_0(M)$ . Оценка точна по порядку  $n$ .

Пусть в  $D = \{z : |z| < 1\}$  задана бесконечная последовательность  $\lambda = \{\zeta_j\}$  точек, попарные гиперболические расстояния (относительно  $D$ ) между которыми не меньше чем  $A_4$ , а число точек из  $\lambda$ , лежащих в кругах  $\{z : |z| < r\}$  при  $0 < r < 1$ , не меньше чем  $A_5/(1-r)$  ( $A_4, A_5 = \text{const}$ ).

**Теорема 3.** Пусть  $p > 0$ ,  $f \in H^p(D)$ ,  $\psi(x) > 0$  — неубывающая при  $x > 0$  функция такая, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-1} \psi(x) = \infty$ . Тогда для указанной последовательности  $\lambda = \{\zeta_j\}$  имеем  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{\psi(k)} |f(\zeta_k)| = \infty$ .

Отметим (см., например, работу В.Я.Эйдермана в Матем. заметках, 1995, т. 57, N 1, с. 150-153), что подобные оценки сумм применяются при исследовании  $O(P)$ -,  $o(P)$ -полноты систем дробей  $\{1/(z - \zeta_k)\}$  в пространствах Харди, Неванлинны и др.

Работа поддержана РФФИ (проекты 99-01-00119, 00-01-00342).